СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РЕЗЕРВНЫМ ПРИБОРОМ

В. И. Клименок, В. С. Шумченя

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: klimenok@bsu.by

В статье исследуется однолинейная система массового обслуживания с ожиданием и резервным прибором, которая может быть использована при моделировании схемы энергосбережения в некоторых реальных системах передачи и обработки информации. Любая заявка, поступившая в систему, обслуживается основным прибором до тех пор, пока не обслужится до конца либо пока не сработает установленный в начале обслуживания таймер. Если заявка еще не обслужилась, а таймер сработал, то к обслуживанию данной заявки присоединяется резервный прибор и скорость передачи увеличивается. Это позволяет избежать слишком больших задержек в системе в условиях разумной экономии энергии.

Ключевые слова: система массового обслуживания, резервный прибор, векторный процесс гибели и размножения, стационарное распределение, время пребывания.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с бесконечным буфером, в которую поступает стационарный пуассоновский поток заявок интенсивности λ.

Время обслуживания заявки имеет фазовое распределение (PH – Phase type distribution) с неприводимым представлением $(\boldsymbol{\beta}, S)$. Это означает следующее. Время обслуживания интерпретируется как время, за которое цепь Маркова m_t, $t \geq 0$, с пространством состояний $\{1, \ldots, M + 1\}$ достигнет поглощающего состояния $M + 1$. Переходы цепи m_t, $t \geq 0$, с пространством состояний $\{1, \ldots, M\}$ задаются субгенератором S, а интенсивности переходов в поглощающее состояние задаются вектором $\boldsymbol{S}_0 = -S\boldsymbol{e}$. Когда обслуживание начинается, состояние процесса m_t, $t \geq 0$, выбирается из множества $\{1, \ldots, M\}$ на основании вероятностного вектора-строки $\boldsymbol{\beta}$. Полагаем, что матрица $S + \boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\beta}$ является неприводимой. Интенсивность обслуживания задается как $\mu = -(\boldsymbol{\beta}S^{-1}\boldsymbol{e})^{-1}$.

Кроме основного обслуживающего прибора в системе имееется резервный прибор. Свободный резервный прибор подключается к обслуживанию текущей заявки, если время обслуживания этой заявки превышает некоторое предельное время нахождения на приборе. Это предельное время определяется как случайная величина (таймер), имеющая PH распределение с неприводимым представлением $(\boldsymbol{\tau}, T)$ и пространством состояний управляющего процесса $(1,2,\ldots,R)$. Среднее значение предельного времени $\kappa = -(\boldsymbol{\tau} T^{-1}\boldsymbol{e})^{-1}$, $\boldsymbol{T}_0 = -T\boldsymbol{e}$. При подключении к обслуживанию резервного прибора оба прибора начинают совместное обслуживание заявки, которое продолжается с той же фазы, на которой закончился таймер. Чтобы отразить тот факт, что при подключении резервного прибора оставшееся время обслуживания в среднем в α раз меньше, чем то же время при обслуживании только основным прибором, предполагаем, что в момент окончания таймера субгенератор S меняется на $\tilde{S} = \alpha S$, где $\alpha > 1$.

2. ЦЕПЬ МАРКОВА, ОПИСЫВАЮЩАЯ ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ

Пусть в момент времени t, $t \geq 0$,

- i_t – количество заявок в системе, $i_t \geq 0$;
- $r_t = \begin{cases} 0, \text{если резервный прибор не задействован в момент } t, \\ 1, \text{если резервный прибор помогает обслужить заявку в момент } t; \end{cases}$
- m_t – состояние управляющего процесса обслуживания на основном приборе, работающем без помощи резервного прибора, $m_t = \overline{1,M}$;
- η_t – состояние управляющего процесса таймера на основном приборе, работающем без поддержки, $\eta_t = \overline{1,R}$;
- $\tilde{m}_t$ – состояние управляющего процесса обслуживания на основном приборе, работающем с поддержкой резервного прибора.

Процесс изменения состояний системы описывается регулярной неприводимой цепью Маркова $\xi_t, t \geq 0$, с непрерывным временем и пространством состояний

$$\Omega = \{(0);(i,0,m,\eta), i \geq 1, m = \overline{1,M}, \eta = \overline{1,R}; (i,1,\tilde{m}), i \geq 1, \tilde{m} = \overline{1,M}\}.$$

Нетрудно видеть, что число состояний, входящих в любое подмножество со значением $i > 0$, равно $MR + M$.

Далее будем предполагать, что состояния цепи $\xi_t, t \geq 0$, упорядочены следующим образом. При фиксированных значениях компонент i, r упорядочим состояния в лексикографическом порядке возрастания остальных компонент. Обозначим полученные упорядоченные множества как $\Omega_{i,r}$, и все множество состояний Ω упорядочим следующим образом:

$$(0), \Omega_{1,0}, \Omega_{1,1}, \Omega_{2,0}, \Omega_{2,1}, \Omega_{3,0}, \Omega_{3,1} \ldots$$

Лемма 1. Инфинитезимальный генератор Q цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$, имеет следующую блочную структуру

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & O & O & \cdots \\ Q_{1,0} & Q_0 & Q_1 & O & \cdots \\ O & Q_{-1} & Q_0 & Q_1 & \cdots \\ O & O & Q_{-1} & Q_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где

$$Q_{0,0} = \lambda, \quad Q_{0,1} = (\lambda \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\tau} | O_M), \quad Q_{1,0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_0 \\ \tilde{\boldsymbol{S}}_0 \end{pmatrix},$$

$$Q_{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_0 \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{e}\boldsymbol{\tau} & O_M \\ \tilde{\boldsymbol{S}}_0 \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\tau} & O_M \end{pmatrix}, Q_0 = \begin{pmatrix} -\lambda I + S \oplus T & I_M \otimes \boldsymbol{T}_0 \\ O_{M \times MR} & -\lambda I + \tilde{S} \end{pmatrix}, Q_1 = \lambda I_{M(R+1)}.$$

Из вида генератора следует, что исследуемая цепь принадлежит к классу векторных процессов гибели и размножения, см. например, [1].

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием существования стационарного распределения цепи Маркова ξ_t является выполнение неравенства

$$\lambda < \boldsymbol{x}\boldsymbol{\mu}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\mu} = -(S \oplus T)\boldsymbol{e}$, вектор $\boldsymbol{x}$ определяется как единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{x}(S \oplus T)[I - \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\tau})] = 0, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{x}[I - (I_M \otimes \boldsymbol{T}_0)\tilde{S}^{-1}]\boldsymbol{e} = 1. \tag{3}$$

Доказательство. Поскольку исследуемая цепь является векторным процессом гибели и размножения, то, согласно [1], необходимым и достаточным условием существования ее стационарного распределения является выполнение неравенства

$$\boldsymbol{z}Q_{-1}\boldsymbol{e} > \boldsymbol{z}Q_1\boldsymbol{e}, \tag{4}$$

где вектор $\boldsymbol{z}$ является единственным решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{z}(Q_{-1} + Q_0 + Q_1) = 0, \boldsymbol{z}\boldsymbol{e} = 1. \tag{5}$$

Представим вектор $\boldsymbol{z}$ в виде $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеют размерности MR и M соответственно. Тогда неравенство (4) запишется в виде

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{S}_0 \otimes \boldsymbol{e}_L) + \boldsymbol{y}\tilde{\boldsymbol{S}}_0 > \lambda, \tag{6}$$

а система (5) как

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{S}_0 \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{e}\boldsymbol{\tau} + S \oplus T) + \boldsymbol{y}(\tilde{\boldsymbol{S}}_0 \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\tau}) = 0, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{x}(I_M \otimes \boldsymbol{T}_0) + \boldsymbol{y}\tilde{S} = 0, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{y}\boldsymbol{e} = 1. \tag{9}$$

Выражая из (8) вектор $\boldsymbol{y}$ через вектор $\boldsymbol{x}$ и подставляя полученное выражение в неравенство (6) и уравнения (7)–(9), после несложных алгебраических преобразований получаем неравенство (1) и систему (2)–(3). Теорема доказана.

Далее будем предполагать, что неравенство (1) выполняется.

Упорядочим стационарные вероятности в соответствии с определенным выше порядком расположения состояний цепи и сформируем векторы-строки $\boldsymbol{p}_i, i \geq 0$, стационарных вероятностей, соответствующих значению i счетной компоненты.

Векторы $\boldsymbol{p}_i, i \geq 0$, вычисляются с использованием алгоритма, разработанного в [2]. Идея этого алгоритма основана на понятии сенсорной цепи Маркова, см., например, [3]. Краткое описание этого алгоритма следующее.

Алгоритм. Векторы стационарных вероятностей $\boldsymbol{p}_i, i \geq 0$, вычисляются следующим образом.

• Вычисляется матрица G как стохастическое решение нелинейного матричного уравнения $\sum_{k=0}^{2} Q_k G^k = 0$.

• Вычисляется матрица G_0 из уравнения $Q_{1,0} + Q_1 G_0 + Q_2 G G_0 = O$,
откуда

$$G_0 = -(Q_1 + Q_2 G)^{-1} Q_{1,0}.$$

• Вычисляются матрицы $\overline{Q}_{i,l}, l = i, i+1, i \geq 0,$ по формулам

$$\overline{Q}_{i,l} = \begin{cases} Q_{0,0} + Q_{0,1} G_0, i = 0, l = 0, \\ Q_{0,1}, i = 0, l = 1, \\ Q_0 + Q_1 G_i, l = i, i \geq 1, \\ Q_1, l = i+1, i \geq 1, \end{cases}$$

где $G_i = G, i \geq 1$.

• Вычисляются матрицы $\Phi_l, l \geq 0,$ по рекуррентным формулам

$$\Phi_0 = I, \Phi_l = \Phi_{l-1} \overline{Q}_{l-1,l} (-\overline{Q}_{l,l})^{-1}, l \geq 1.$$

• Величина $\boldsymbol{p}_0$ является скаляром, $\boldsymbol{p}_0 = p_0$, и вычисляется как

$$p_0 = (\sum_{l=0}^{\infty} \Phi_l \boldsymbol{e})^{-1}.$$

• Векторы стационарных вероятностей $\boldsymbol{p}_l, l \geq 1,$ вычисляются по формуле

$$\boldsymbol{p}_l = \boldsymbol{p}_0 \Phi_l, l \geq 1.$$

Преимуществом этого алгоритма является отсутствие операции вычитания в рекурсиях. Все матрицы, фигурирующие в алгоритме, являются неотрицательными. Это обеспечивает устойчивость вычислений при компьютерной реализации алгоритма.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ

Вычислив векторы стационарных вероятностей $\boldsymbol{p}_i, i \geq 0,$ можно вычислить также различные характеристики производительности системы. Некоторые из них приводятся ниже.

• Вероятность того, что основной прибор свободен $P_{idle}^{(1)} = p_0$.

• Среднее число заявок в системе $L = \sum_{i=1}^{\infty} i \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{e}$.

• Дисперсия числа заявок в системе $V = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{e} - L^2$.

• Вероятность того, что основной прибор обслуживает заявку без помощи резервного ($P^{(0)}$) и с помощью резервного ($P^{(1)}$).

$$P_0^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{MR} \\ O_M \end{pmatrix}, P_0^{(1)} = 1 - p_0 - P_0^{(0)}.$$

• Вероятность того, что резервный прибор свободен $P_{idle}^{(2)} = 1 - P_0^{(0)}$.

• Вероятность того, что к обслуживанию произвольной заявки будет подключен резервный прибор (P_{help}) и вероятность того, что основной прибор обслужит заявку самостоятельно ($P_{no-help}$)

$$P_{help} = -(\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\tau})(S \oplus T)^{-1}(I_M \otimes T)\boldsymbol{e},\ P_{no-help} = 1 - P_{help}.$$

4. ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ В СИСТЕМЕ

Пусть $\tilde{v}_t$ – время дообслуживания заявки, находящейся на основном приборе в момент времени t. Пусть также

$$\tilde{V}(0,m,\eta,x) = \lim_{t\to\infty} P\{r_t = 0, m_t = m, \eta_t = \eta, \tilde{v}_t < x\}, m = \overline{1,M}, \eta = \overline{1,R};$$

$$\tilde{V}(1,\tilde{m},x) = \lim_{t\to\infty} P\{r_t = 1, \tilde{m}_t = \tilde{m}, \tilde{v}_t < x\}, \tilde{m} = \overline{1,M}, x \ge 0.$$

Введем обозначения для преобразований Лапласа – Стилтьеса

$$\tilde{v}(0,m,\eta,u) = \int_0^\infty e^{-ux} d\tilde{V}(0,m,\eta,x), \tilde{v}(1,\tilde{m},u) = \int_0^\infty e^{-ux} d\tilde{V}(1,\tilde{m},x), Re\, u \ge 0,$$

и векторов-столбцов $\boldsymbol{v}(0,u)$ и $\boldsymbol{v}(1,u)$, составленных из этих преобразований путем лексикографического упорядочения компонент m,η в первом случае и компоненты $\tilde{m}$ во втором случае.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Векторы преобразований Лапласа – Стилтьеса времени дообслуживания заявки имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{v}(0,u) = (uI - S \oplus T)^{-1}[\boldsymbol{S}_0 \otimes \boldsymbol{e}_R - (uI - \tilde{S})^{-1}\tilde{S}_0 \otimes \boldsymbol{T}_0], \quad (10)$$

$$\boldsymbol{v}(1,u) = (uI - \tilde{S})^{-1}\boldsymbol{S}_0. \quad (11)$$

Доказательство. Используя вероятностную интерпретацию преобразования Лапласа – Стилтьеса, запишем $\boldsymbol{v}(0,u)$ как

$$\boldsymbol{v}(0,u) = \int_0^\infty e^{-ut} e^{(S\oplus T)t}(\boldsymbol{S}_0 \otimes \boldsymbol{e}_R)dt +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-ut} \int_0^t e^{(S\oplus T)x}(I_M \otimes \boldsymbol{T}_0)dx(I_M \otimes \boldsymbol{e}_R)e^{\tilde{S}(t-x)}\tilde{\boldsymbol{S}}_0 dt. \quad (12)$$

Вычислим интегралы в правой части (12). Очевидным образом получим выражение (11) для первого слагаемого в (12):

$$\int_0^\infty e^{-ut} e^{(S\oplus T)t}(\boldsymbol{S}_0 \otimes \boldsymbol{e}_R)dt = (uI - S \oplus T)^{-1}(\boldsymbol{S}_0 \otimes \boldsymbol{e}_R). \quad (13)$$

Приведем теперь цепочку соотношений, в конце которой увидим конечное выражение для второго слагаемого в (12).

$$\int_0^\infty e^{-ut} \int_0^t e^{(S\oplus T)x}(I_M \otimes \boldsymbol{T}_0)dx(I_M \otimes \boldsymbol{e}_R)e^{\tilde{S}(t-x)}\tilde{\boldsymbol{S}}_0 dt =$$

$$= -[(S-\tilde{S})] \oplus T]^{-1}\{\int_0^\infty e^{-ut}(e^{St} \otimes e^{Tt}\boldsymbol{T}_0)dt\tilde{\boldsymbol{S}}_0 - \int_0^\infty e^{-ut}(e^{\tilde{S}t} \otimes \boldsymbol{T}_0)dt\tilde{\boldsymbol{S}}_0\} =$$

$$= -[(S-\tilde{S})] \oplus T]^{-1}\{[uI-(S\oplus T)]^{-1} - (uI-\tilde{S})^{-1} \otimes I_R)\}(\tilde{\boldsymbol{S}}_0 \otimes \boldsymbol{T}_0) =$$

$$= -[(S-\tilde{S})] \oplus T]^{-1}[uI-(S\oplus T)]^{-1}\{(uI-\tilde{S}) \otimes I_R) - [uI-(S\oplus T)](uI-\tilde{S})^{-1} \otimes I_R)\}(\tilde{\boldsymbol{S}}_0 \otimes \boldsymbol{T}_0) =$$

$$= -[uI-(S\oplus T)]^{-1}(uI-\tilde{S})^{-1} \otimes I_R)(\tilde{\boldsymbol{S}}_0 \otimes \boldsymbol{T}_0). \quad (14)$$

Подставляя (13)–(14) в (12), получим (10). Формула (11) доказывается очевидным образом. Теорема доказана.

Следствие 1. Преобразование Лапласа – Стилтьеса времени обслуживания произвольной заявки вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{v}(0,u) = (\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{v}(0,u).$$

Теорема 4. Преобразование Лапласа – Стилтьеса времени пребывания произвольной заявки в системе имеет вид

$$\boldsymbol{v}(u) = p_0\boldsymbol{v}(0,u) + \sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_i\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}(0,u)\\ \boldsymbol{v}(1,u)\end{pmatrix}\boldsymbol{v}^i(0,u).$$

Доказательство теоремы следует из формулы полной вероятности с учетом вероятностного смысла преобразования Лапласа – Стилтьеса.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена система массового обслуживания с бесконечным буфером и резервным прибором. Прибор, находящийся в резерве, "отдыхает", пока время обслуживания текущей заявки не превысит некоторого предела, установленного таймером. После этого он присоединяется к обслуживанию, помогая основному прибору обслужить заявку быстрее. Входной поток в систему является пуассоновским, времена обслуживания и время, установленное на таймере, распределены по фазовому закону. Найдено условие существования стационарного режима в системе, предложены алгоритмы для вычисления стационарного распределения и основных характеристик производительности. Получена формула для преобразования Лапласа – Стилтьеса времени пребывания в системе. Результаты могут быть расширены за счет выбора более общей модели входного потока, например, марковского потока, а также путем рассмотрения многолинейной системы с несколькими резервными приборами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neuts, M.* Matrix-geometric solutions in stochastic models / M. Neuts. Baltimore : The Johns Hopkins University Press, 1981. 332 p.

2. *Klimenok, V. I.* Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory / V. I. Klimenok, A. N. Dudin // Queueing Systems. 2006. V. 54. P. 245–259.

3. *Kemeni, J. G.* Denumerable Markov Chains / J. G. Kemeni, J. L. Snell, A. W. Knapp. New York : Van Nostrand, 1966. 348 p.